The International Journal of Engineering and Science (IJES)
|| Volume || 10 || Issue || 2 || Series I || Pages || PP 56-64 || 2021 ||
ISSN (e): 2319-1813 ISSN (p): 20-24-1805

Simetrías de Lie y soluciones invariantes para las ecuaciones de Emden-Fowler estándar y Emden-Fowler generalizada

G. Loaiza[1], Y. Acevedo[2], O. M. L. Duque[3]

Resumen

Con el fin de incentivar hacia la investigación y la innovación didáctica en los diferentes pregrados de matemáticas o licenciaturas afines, se muestran los pasos aplicados para obtener las simetrías de Lie asociadas a dos ecuaciones diferenciales ordinarias. En términos de los parámetros de las ecuaciones de Emden-Fowler estándar y Emden-Fowler generalizada, se establecen condiciones adecuadas que permitan determinar los respectivos grupos de simetrías de Lie y, a partir de ellos, obtener respectivas soluciones invariantes para dichas ecuaciones.

Palabras Clave:- Ecuación estándar Emden-Fowler; Ecuación generalizada de Emden-Fowler; Ecuación estándar de Lane-Emden; Ecuación generalizada de Thomas-Fermi; Grupo continuo de simetrías de Lie; Solución invariante.

Date of Submission: 16-02-2021 Date of Acceptance: 02-03-2021

I. INTRODUCCIÓN

Usualmente en un curso básico de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) se enseñan métodos para resolver algunas familias de estas ecuaciones, los cuales consisten en algoritmos basados en algunos cambios de variable, la estructura y orden de las ecuaciones diferenciales. Por lo general, los estudiantes se acostumbran a usar estos métodos sin pensar en otras posibilidades de solución que involucren ideas fundamentadas en otras ramas de las matemáticas, lo cual puede representar una limitación para estudiantes que pretendan involucrarse en estudios superiores o para el discurso de aquellos que se quieran involucrar en labores docentes.

Con el ánimo de incentivar la búsqueda de nuevas estrategias para enfrentar soluciones de problemas en matemáticas, consideramos importante que después del curso básico de ecuaciones diferenciales y cálculo en varias variables, los estudiantes tengan la oportunidad de conocer un método que se base en conceptos matemáticos que les conduzca a involucrarse en nuevas ramas de las matemáticas y además, les permita resolver la mayoría de las ecuaciones a las que se hayan enfrentado hasta el momento. Es por ello que en este artículo presentamos, a manera de ejemplo, la aplicación de la teoría de simetrías de Lie a la búsqueda de soluciones de ecuaciones diferenciales. Así mismo, con el espíritu de generar una cultura autodicta en estudios avanzados de matemática por parte de los estudiantes, en el presente artículo se omitirán las definiciones básicas necesarias, las cuales el estudiante puede consultar en la bibliografía que se indica en las respectivas secciones del trabajo.

Como es conocido, no existe una teoría global con la que se resuelva cualquier EDO. En los esfuerzos por encontrar un método global, Sophus Lie, usando una idea propia de la teoría de Galois para polinomios, construyó una teoría que permite de forma algorítmica resolver ecuaciones diferenciales, con un procedimiento de integración general basado en la variabilidad de la ecuación diferencial bajo la acción de un grupo continuo de simetrías. Esta idea se fundamenta en construir transformaciones de una ecuación diferencial en otra de la misma clase, en tanto al orden y la estructura. Dichas transformaciones forman un grupo continuo de Lie y en muchos casos, tiene la ventaja de conducir a soluciones exactas.

En el presente trabajo se implementa la teoría de Lie en dos EDO no lineales, que sean conocidas por sus aplicaciones, para obtener resultados respecto a sus soluciones invariantes. Las EDO elegidas para dicho propósito tienen aplicaciones en física, matemática, astrofísica, química, biología e hidrodinámica.

A continuación se enumeran las EDO que se estudiarán:

1. $y^{n}(x) = Ax^{n}y^{m}$, m, con A, n, m parámetros reales, que es llamada ecuación estándar de Emden-Fowler.
2. $y^{n}(x) = ax^{n}y^{m}(y^{l})\ l$, con A, n, m, l parámetros reales, que es llamada ecuación de Emden-Fowler generalizada.

Varios problemas en física, matemática, astrofísica y química [1, 2, 3, 4] pueden ser modelados por la ecuación Emden-Fowler

$$y''(x) + a_1(x)y^1(x)y'(x) + f(x)y^m = 0, \tag{1}$$

con f y a_1 funciones reales continuas de variable real y $m \neq 1$, 0 constante. Cuando $a_1(x) = \frac{b}{x}$, b constante y $f(x) = 1$, la expresión (1) es llamada ecuación estándar de Lane-Emden, que es usada para modelar el comportamiento térmico de las nubes de gas esféricas actuando bajo atracciones mutuas entre sus moléculas [5]. Si en (1), $a_1(x) = \frac{b}{x}$, $f(x) = -A_0 x^w$ con b, A_0 constantes y w número real se tiene la famosa ecuación generalizada de Thomas–Fermi [6, 7], que puede ser reducida a la forma

$$y''(x) - A_0(b-1)_x \frac{(w+2b)-(w+2b)}{1-b}\, y^m = 0 \qquad (2)$$

Según [8, 9], la expresión (1) siempre puede ser reducida a la forma

$$y''(x) = Ag(x)y^m, \qquad (3)$$

usando la transformación de Kummer-Liouville, con g función continua y A constante. La ecuación (3) es llamada ecuación canónica generalizada de Emden-Fowler.

Nótese que las soluciones para ecuaciones del tipo estándar de Lane-Emden (1), casi siempre son bastante problemáticas por el comportamiento de la singularidad en el origen, con respecto a $f\ y\ a_1$. Para ecuaciones de ese tipo, en [10] se presentan soluciones analíticas aproximadas y en [11] se obtienen soluciones usando el Método Analítico de Descomposición (MAD) [12]. También en [13, 14] se encuentran soluciones de (1) usando el método de perturbación homotópica y, en [15], se obtienen soluciones usando el Método Varacional Iterado (MVI). Otro método presentado en [14, 16] que es bastante potente para resolver ecuaciones del tipo (3) y (2), es el principio variacional invariante, el cual hace uso de las simetrías variacionales del sistema, o bien, del grupo de simetrías de Noether o de Lie.

Se considerará en el presente artículo la ecuación (3), cuando $g(x) = x^n$,que es presentada en [4], [17]-[18] y es llamada ecuación estándar de EmdenFowler o ecuación de Bellman como la denominan otros autores. Así, la ecuación a considerar es

$$y''(x) = Ax^n y^m, con\ A, m, n \text{ constantes reales} \qquad (4)$$

También será de interés la ecuación de Emden-Fowler generalizada presentada en [17]

$$y''(x) = Ax^n y^m (y')^l\ con\ A, m, n, l \text{ constantes reales} \qquad (5)$$

En [19] se presenta solo una simetría de Lie para (4) en el caso $3 + m + n\ 6 \neq\ 0$ y para la ecuación de Thomas-Fermi: dos simetrías de Lie en el caso $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ y otras dos simetrías de Lie para el caso $m = -(3 + n)$. En [4], [17]-[18], se proponen soluciones de (4) para diferentes valores particulares de $n\ y\ m$. En [17] se propone una solución de forma paramétrica cuando $m \neq 1\ y\ n = -3 - m$. Dicha solución es

$$x = aC_1^{m-1}\left(\int (1 \pm \tau^{m+1})^{-\frac{1}{2}} d\tau + C_2\right)^{-1},$$
$$y = bC_1^{m-1}\tau\left(\int (1 \pm \tau^{m+1})^{-\frac{1}{2}} d\tau + C_2\right)^{-1}, \qquad (6)$$

$con\ A = \pm\frac{m+1}{2} a^{m+1} b^{1-m}$. Para (5), en [17] y [20], se proponen bastantes soluciones en casos particulares para combinaciones de n, m y l. Ahora, pretendiendo condiciones generales sobre $n, m\ y\ l$, bajo la condición $m + l \neq 1$,en [17] se presenta la siguiente solución:

$$y(x)\left(\left(\frac{n+2-l}{1-m-l}\right)^{1-l}\left(\frac{n+m+1}{A(1-m-l)}\right)\right)^{\frac{1}{m+l-1}} x^{\frac{n+2-1}{1-m-l}} \qquad (7)$$

En este artículo se establecen condiciones adecuadas sobre los parámetros que definen a las ecuaciones (4) y (5), para obtener los respectivos grupos de simetrías de Lie; de manera que los operadores generadores de dichos grupos conduzcan a soluciones invariantes para las respectivas ecuaciones.

Los textos clásicos, sobre la forma como se utilizan los operadores para el cálculo del grupo de simetrías de Lie y se presentan aplicaciones a las ecuaciones diferenciales, son [21, 22, 23, 24]. También destacamos las aplicaciones presentadas en [25, 26].

II. ECUACIÓN ESTÁNDAR DE EMDEN-FOWLER

En esta sección se establecen condiciones sobre los parámetros m y n de (4), que permitan calcular los operadores generadores del grupo de simetrías de Lie para (4). A partir de dichos operadores, se establecen respectivas soluciones invariantes para dicha ecuación, mediante el uso de la condición de curva invariante presentada en la sección 4.3 de [26], ya que al aplicar el método basado en la reduccion canónica de variables, aparecen cálculos mucho más complejos. Respecto a las simetrías se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1. $El\ grupo\ de\ simetrías\ de\ Lie\ para\ la\ ecuación\ estándar\ Emden-Fowler\ (4), donde\ 3+m+n=0, 3+m+2n6=0\ y\ m6=0,1, es\ generado\ por$:

$$\Pi_1 = \left[x\left(\frac{1-m}{3+m+2n}\right)\right]\frac{\partial}{\partial_x} + \left[y\left(\frac{2+n}{3+m+2n}\right)\right]\frac{\partial}{\partial_y},$$
$$\Pi_2 = [x^2]\frac{\partial}{\partial_x} + [xy]\frac{\partial}{\partial_y}. \qquad (8)$$

Prueba. La forma general de un grupo de Lie de un parámetro que se admite para (4) está dado por:

$$x \to x + \epsilon X(x.y) + O(\epsilon^2) \qquad y \qquad y \to y + \epsilon Y(x.y) + O(\epsilon^2),$$

donde ϵ es el parámetro del grupo. El campo vectorial asociado con el grupo de transformaciones anterior se describe por $\Gamma = X(x,y)\frac{\partial}{\partial_x} + Y(r,y)\frac{\partial}{\partial_y}$ con X,Y funciones diferenciables en $\mathbb{R}^2$. Para encontrar los infinitesimales $X(x,y)\ y\ Y\ (x,y)$, se aplica el operador segunda prolongación

$$\Gamma^{(2)} = \Gamma + Y_{[x]}\frac{\partial}{\partial y_x} + Y_{[xx]}\frac{\partial}{\partial y_{xx}}, \qquad (9)$$

a la ecuación (4), se obtiene la siguiente condición de simetría

$$Y_{[xx]} - Anx^{n-1}y^mX - Amx^ny^{m-1}Y = 0 \qquad (10)$$

donde $Y_{[x]}, Y_{[xx]}$ son coeficientes en $\Gamma^{(2)}$ dados por:

$$Y_{[X]} = D_X(Y) - y_xD_X(X) = Y_X + (Y_y - X_x)y_x - X_yy_x^2,,$$
$$Y_{[xx]} = D_x(Y_{[x]}) - y_{xx}D_x(X),$$
$$= Y_{xx} + (2Y_{xy} - X_{xx})y_x + (Y_{yy} - 2X_{ry})y_x^2 - X_{yy}y_x^3$$
$$+(Y_y - 2X_x)y_{yy} - 3X_yy_Xy_{xx}. \qquad (11)$$

donde D_X es el operador de derivada total: $D_x = \partial_x + y_x\partial_x + y_{xx}\partial_{yr} + \cdots$. Sustituyendo (11) en (10) se obtiene

$$Y_{xx} + (2Y_{xy} - X_{xx})y_x + (Y_{yy} - 2X_{xy})y_x^2 - X_{yy}y_x^3 + (Y_y - 2X_x)y_{xx}$$
$$-3X_yy_xy_{xx} - Anx^{n-1}y^mX - Amx^ny^{m-1}\,Y = 0 \qquad (12)$$

Al sustituir $y_{\,xx} = Ax^n\,y^m$ en la expresion anterior se obtiene

$$Y_{xx} + (2Y_{xy} - X_{xx})y_x + (Y_{yy} - 2X_{xy})y_x^2 - X_{yy}y_x^3 + (Y_y - 2X_x)(Ax^ny^m)555$$
$$-3X_yY_x(Ax^ny^m) - Anx^{n-1}y^mX - Amx^ny^{m-1}Y = 0 \qquad (13)$$

Al agrupar con respecto a $1, y_x, y_x^2\ y\ y_x^3$ en (13) se tiene

$$Y_{xx} + (Y_y - 2X_x)(Ax^ny^m) - Anx^{n-1}y^mX - Amx^ny^{m-1}Y$$
$$+(2Y_{xy} - X_{xx} - 3AX_yx^ny^m)y_x + (Y_{yy} - 2X_{xy})y_x^2 - X_{yy}y_x^3 = 0 \qquad (14)$$

Luego analizando los coeficientes respecto a $1,\ y_x,\ y_x^2\ y\ y_x^3$ en (14), se obtienen las ecuaciones determinantes:

$$X_{yy} = 0, \tag{15a}$$
$$Y_{yy} - 2X_{xy} = 0, \tag{15b}$$
$$-3Ay^m x^n X_y + 2Y_{xy} - X_{xx} = 0, \tag{15c}$$
$$Ay^{m+1}x^{n+1}Y_y - Amy^m x^{n+1}Y - 2Ay^{m+1}x^{n+1}X_x - Any^{m+1}x^n X + rxY_{xx} = 0. \tag{16}$$

Resolviendo en (15a), se tiene

$$X = yc_1(x) + c_2(x), \tag{17}$$

con c_1, c_2 funciones arbitrarias. Reemplazando (17) en (15b) resulta $Y_{yy} = 2c_1'(x)$ e integrando se sigue que

$$Y = y^2 c_1'(x) + yc_3(x) + c_4(x), \tag{18}$$

con c_3, c_4 funciones arbitrarias. Al sustituir (17) y (18) en (15c) se obtiene

$$-3Ay^m x^n[c_1(x)] + 2[2yc_1''(x) + c_3'(x)] - [yc_1''(x) + c_2''(x)] = 0, \tag{19}$$

y al derivar en (19) dos veces con respecto a y, se llega a la expresión$-3Am(m-1)\,y^{m-2}x^n[c_1(x)] = 0$. Ahora, como $A \neq 0$ y $m \neq 0, 1$, entonces $c_1(x) = 0$ y por (19) se tiene que $2c_3'(x) - c_2''(x) = 0$; por tanto,

$$2c_3(x) - c_2'(x) = k_1 \ con\ k_1\ constante. \tag{20}$$

Reescribiendo (17),(18) y (20), se tiene:

$$X = c_2(X), Y = yc_3(x) + c_4(x), 2c_3(x) - c_2'(x) = k_1. \tag{21}$$

Sustituyendo (21) en (16) y dividiendo por xy en ambos lados de la expression obtenida, se llega a la expresión

$$Ay^m x^n[c_3(x)] - Amy^{m-1}x^n[yc_3(x) + c_4(x)] - 2Ay^m x^n[c_2'(x)] - Any^m x^{n-1}[c_2(x)] + [yc_3''(x) + c_4''(x)] = 0. \tag{22}$$

Al organizar con respecto a $1, y, y^{m-1}, y^m$ en (22) se tiene:

$$Ay^m\left[x^n c^3(x)(1-m) - x^n\left(2c_2'(x) + nx^{-1}c_2(x)\right)\right] - Amy^{m-1}x^n c_4(x) + yc_3''(x) + c_4''(x) = 0. \tag{23}$$

Al analizar los coeficientes $1, y, y^{m-1}, y^m$ en (23) obtenemos

$$c_4(x) = c_4''(x) = 0,\ c_3''(x) = 0,\ c_3(x)(1-m) - (2c_2'(x) + nx^{-1}c_2(x) = 0 \tag{24}$$

Usando (21) y (24) obtenemos:

$$c_3(x) = xk_2 + k_3 \quad c_2(x) = k_2x^2 + x(2k_3 - k_1) + k_4. \tag{25}$$

con k_2, k_3, k_4 constantes arbitrarias y tambien se tiene

$$x\left(k_2(-3-m-n)\right) + k_3(-3-m-2n) + k_1(2+n) - nx^{-1}k_4 = 0 \tag{26}$$

Al analizar los coeficientes con respecto a $1, x, x^{-1}$en (26) obtenemos:

$$k_2(-3-m-n) = 0,\ k_3(-3-m-2n) + k_1(2+n) = 0, nk_4 = 0\,. \tag{27}$$

Luego suponiendo en (27) que $3 + m + n = 0, 3 + m + 2n\ 6 =\ 0\ y\ k4 = 0$, se obtiene, de (25), que

$$c_3(x) = xk_2 + \frac{k_1(2+n)}{3+m+2n} \quad y \quad c_2(x) = k_2x^2 + x\frac{k_1(1-m)}{3+m+2n}. \tag{28}$$

Usando (28) en (21) tenemos los generadores infinitesimales

$$X = k_2 x^2 + x\frac{k_1(1-m)}{3+m+2n} \quad Y = y\left(xk_2 + \frac{k_1(2+n)}{3+m+2n}\right), \tag{29}$$

donde k_1, k_2 son constantes arbitrarias, con 3 + m + n = 0, y 3 + m + 2n 6= 0. Las dos expresiones anteriores para $X(x,y)$ y $Y(x,y)$, permiten determiner el grupo de simetrías, ya que el generador infinitesimal es

$$\begin{aligned}\Gamma &= \mathrm{X}(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Y(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\\ &= \left(k_2x^2 + x\frac{k_1(1-m)}{3+m+2n}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(xyk_2 + y\frac{k_1(2+n)}{3+m+2n}\right)\frac{\partial}{\partial y}\\ &= k_1\left[x\left(\frac{1-m}{3+m+2n}\right)\frac{\partial}{\partial x} + y\left(\frac{2+n}{3+m+2n}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right]\\ &\quad + k_2\left[x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}\right]\\ &= k_1\Pi_1 + k_2\Pi_2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, los generadores del grupo de simetrías de (4) son los operadores Π_1 y Π_2 descritos en el enunciado de la Proposición (1); logrando así el resultado propuesto.

□

Del resultado anterior, el espacio vectorial generado por Π1, Π2 es un algebra de Lie 2-dimensional. El método más usual para obtener soluciones a partir de simetrías, es la reducción canónica de variables. Pero en las ecuaciones tratadas en este trabajo, dicho método conduce a cálculos muy complejos. Se procederá a construir una solución invariante para (4) aplicando la condición de curva invariante [26], sobre cada uno de los generadores del grupo de simetrías.

Acorde a [26] y teniendo en cuenta las condiciones de la Proposición (1), la condición de curva invariante respecto al operador Π_1 adquiere la forma

$$Q(x,y,y_x) = Y_1 - y_x X_1 = 0, \qquad \text{con } X_1 = \frac{(1-m)x}{-(3+m)} \; y \; Y_1 = \frac{(1+m)y}{(3+m)}.$$

Denotando las constantes $A_1 := \frac{(1+m)}{(3+m)}$ y $B_1 := \frac{1-m}{-(3+m)}$, la condición anterior se expresa mediante la ecuación diferencial $A_1 y - B_1 y_x x = 0$, cuya solución es

$$y(x) = Cx^{\frac{A_1}{B_1}} = Cx^{-\frac{1+m}{1-m}}, \text{con } m \neq 1, x, y > 0 \; y \; C \; constante. \tag{30}$$

Al sustituir (30) en (4), obtenemos una solución invariante para $y(x)$, cuando

$$C = \left(\frac{2(1+m)}{A(1-m)}\right)^{\frac{1}{1-m}}, \text{dada por } y(x) = \left(\frac{2(1+m)}{A(1-m)^2}\right)^{\frac{1}{1-m}} x^{\frac{(1+m)}{m-1}}.$$

De manera análoga, a partir de Π_2 se obtiene la solución trivial $y(x) = 0$.

Todo lo anterior se puede resumir en la siguiente proposición.

Proposición 2. *Una solución invariante de la ecuación estándar de* $EmdenFowler\,(4), con\; A \neq 0, m \neq 0, 1, n + m + 3 = 0 \; y \; 3 + m + 2n \neq 0, es$:

$$y(x) = \left(\frac{2(1+m)}{A(1-m)^2}\right)^{\frac{1}{1-m}} x^{\frac{(1+m)}{m-1}},$$

Siempre que $\left(\frac{2(1+m)}{A(1-m)^2}\right)^{\frac{1}{1-m}}$ *esté bien definido.*

III. ECUACIÓN DE EMDEN-FOWLER GENERALIZADA

Con resultados y procedimientos análogos a los de la sección anterior, en esta sección se presentan resultados sobre el grupo de simetrías de Lie y una solución invariante para la ecuación de Emden-Fowler generalizada (5). En tanto al grupo de simetrías de Lie para (5) se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3. *El grupo de simetrías de Lie para la ecuación EmdemFowler generalizada (5), con* $n, m \neq 0, l \neq 0, 3$ *y* $l + m - 1 \neq 0$, *es generado por el operador*

$$\Pi_1 = (x)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\mathrm{l}-n-2}{\mathrm{l}+m-1}y\right)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Prueba. Aplicando el operador de segunda prolongación (9) en (5) se tiene

$$Y_{[xx]} - Anx^{n-1}y^m y_x^{\mathrm{l}} X - Amx^n y^{m-1} y_x^{\mathrm{l}} Y - \mathrm{l} A x^n y^m y_x^{(\mathrm{l}-1)} Y_{[x]} = 0$$

y sustituyendo (11) en la expresión anterior se obtiene

$$\begin{aligned} &Y_{[xx]} + (2Y_{xy} - X_{xx})y_x + (Y_{yy} - 2X_{xy})y_x^2 - X_{yy}y_x^3 + (Y_y - 2X_x)y_{xx} \\ &-3X_y y_y y_{xx} - Anx^{n-1}y^m y_x^{\mathrm{l}} X - Amx^n y^{m-1} y_x^{\mathrm{l}} Y \qquad (31) \\ &-lAx^n y^m y_x^{(\mathrm{l}-1)}\left[Y_x + (Y_y - X_x)y_x - X_y y_x^2\right] = 0. \end{aligned}$$

Al agrupar en (31) con respecto 1, y_x, $y_x^2, y_x^3, y_x^l, y_x^{l-1}, y_{xx}$ y $y_x y_{xx}$ se tiene

$$\begin{aligned} &(2Y_{xy} - X_{xx})y_x + (Y_{yy} - 2X_{xy})y_x^2 + y_x^3(-X_{yy}) + y_x^{(l-1)}(-lAx^n y^m Y_x) \\ &+y_x^l\left(-Anx^{n-1}y^m X - Amx^n y^{m-1} Y - lAx^n y^m (Y_y - X_x)\right) \qquad (32) \\ &+y_x^{(l+1)}(lAx^n y^m X_y) + (Y_y - 2X_x)y_{xx} - 3X_y y_x y_{xx} + Y_{xx} = 0 \end{aligned}$$

Al sustituir $y_{xx} = Ax^n y^m y_x^l$ en (32) y agrupar con respecto a 1, $y_x, y_x^2, y_x^3, y_x^l, y_x^{l-1}$ y y_x^{l+1} obtenemos

$$\begin{aligned} &(2Y_{xy} - X_{xx})y_x + (Y_{yy} - 2X_{xy})y_x^2 + y_x^3(-X_{yy}) + y_x^{l-1}(-lAx^n y^m Y_x) \\ &+y_x^l\left(-Anx^{n-1}y^m X - Amx^n y^{m-1}(Y_y - X_x) + Ax^n y^m (Y_y - 2X_x)\right) \\ &+y_x^{(l+1)}(lAx^n y^n X_y - 3Ax^n y^m X_y) + Y_{xx} = 0 \qquad (33) \end{aligned}$$

Luego analizando los coeficientes para $1, y_x, y_x^2$, y_x^3, y_x^l, y_x^{l-1} y y_x^{l+1} se tienen las siguientes ecuaciones determinantes con $A \neq 0$ y $l \neq 0, 3$:

$$\begin{aligned} &Y_x = X_y = 0, && (34a) \\ &Y_{yy} = X_{xx} = 0, && (34b) \\ &-my^{-1}Y - nx^{-1}X + (1-l)Y_y + (l-2)X_x = 0 && (34c) \end{aligned}$$

Las soluciones de (34a) son $Y = c_1(y)$ y $X = c_2(x)$, que remplazadas en (34b), implican:

$$Y = a_1 y + a_2 \quad y \quad X = a_3 x + a_4,$$

con a_1, a_2, a_3, a_4 constantes arbitrarias. Sustituyendo (35) en (34c) se tiene

$$-my^{-1}[a_1 + a_2] - nx^{-1}[a_3 x + a_4] + (1-l)[a_1] + (l-2)[a_3] = 0 \qquad (36)$$

Derivando con respecto a y en (36) y tomando $m \neq 0$ se sigue que $a_2 = 0$ y por tanto, reescribiendo X, Y en (35) se tiene:

$$Y = a_1 y \;\; y \;\; X = a_3 x + a_4. \qquad (37)$$

Además, (36) queda

$$-my^{-1}[a_1 y] - nx^{-1}[a_3 x + a_4] + (1 - l)[a_1] + (l-2)[a_3] = 0. \qquad (38)$$

Derivando con respecto a x en (38), $nx^{-2}\ [a_4] = 0$ y suponiendo $n \neq 0$ se llega a $a_4 = 0$. Por tanto en (37) actualizando X, Y se tiene:

$$Y = a_1 y \ \ y \ \ X = a_3 x \qquad (39)$$

Sustituyendo $a_4 = 0$ en (38) y organizando, se obtiene $-m[a_1] - n[a_3] + (1-l)[a_1] + (l-2)[a_3] = 0$, que es equivalente a:

$$a_1 = a_3\left(\frac{l-n-2}{l+m-1}\right),$$

con $l + m - 1 \neq 0$. Por tanto, los generadores infinitesimales son:

$$X = a_3 x \ \ \ y \ \ Y = a_3\left(\frac{l-n-2}{l+m-1}\right)y,$$

con a_3 constante arbitraria. De tal forma, el generador infinitesimal es

$$\Gamma = \mathrm{X(x.y)}\frac{\partial}{\partial x} + Y(x,y)\frac{\partial}{\partial y} = (a_3 x)\frac{\partial}{\partial x} + \left(a_3\frac{l-n-2}{l+m-1}y\right)\frac{\partial}{\partial y},$$
$$= a_3\left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{l-n-2}{l+m-1}\frac{\partial}{\partial y}\right] = a_3\Pi_1.$$

En consecuencia, el grupo de simetrías de Lie para la ecuación de EmdemFowler generalizada, es generado por el operador Π_1 que aparece en el enunciado de la proposición. □

La simetría hallada no se encuentra en la literatura, se procede ahora a construir una solución invariante usando, el operador Π_1 de la Proposición (3) que se acabó de probar.

Según [26] y la Proposición (3), la condición de curva invariante en el operador Π_1, tiene la forma:

$$Q(x,y,y_x) = Y_1 - y_x X_1 = 0, \text{con } X_1 = x \ \ \text{y} \ \ Y_1 = \frac{l-n-2}{l+m-1}y,$$

que plantea una ecuación cuya solución para y es

$$y(x) = Cx^{A_1}\ con\ C\ y\ A_1 = \frac{(l-n-2)}{l+m-1} \text{ constantes y } \ x,y > 0. \qquad (40)$$

Sustituyendo (40) en (5) se obtiene

$$A_1(A_1-1)Cx^{A_1-2} - AC^{m+l}A_1^l x^{l(A_1-1)+A_1 m+n} = 0. \qquad (41)$$

Nótese que los exponentes de x en (41) son $A_1 - 2 = -\frac{l+2m+n}{l+m-1} = -p$ y $l(A_1-1) + mA_1 + n = -\frac{l+2,+n}{l+m-1} = -p$, asi tenemos que (41) es de la forma:

$$x^{-p}[A_1(A_1-1)C - AC^{m+l}A_1^l] = 0. \qquad (42)$$

Multiplicando en (42) por x^p se tiene

$$A_1(A_1-1)C - AC^{m+l}A_1^l = 0 \qquad (43)$$

Luego, considerando que $l + m - 1 \neq 0$ podemos despejar C en (43):

$$C = \left(\frac{A_1^{1-1}(A_1)}{A}\right)^{\frac{1}{m+l-1}} = \left(\frac{A_1^{2-l} - A_1^{1-1}}{A}\right)^{\frac{1}{m+l-1}}$$

$$= \sqrt[m+l-1]{\frac{-\left(\frac{l-n-2}{l+m-1}\right)^{1-l}\left(\frac{m+n+1}{l+m-1}\right)}{A}},$$

siempre y cuando el radical quede bien definido.
De lo anterior y (40), se consigue una solución invariante para (5), en términos de n, m, l, dada por

$$y(x) = \left(\left(\frac{l-n-2}{l+m-1}\right)^{1-l}\left(\frac{m+n+1}{A(1-m-l)}\right)\right)^{\frac{1}{m+l-1}} x^{\frac{l-n-2}{m+l-1}},$$

Se puede resumir todo el proceso en el siguiente resultado

Proposición 4. La ecuación Emden-Fowler generalizada (5) tiene la solución invariante

$$y(x) = \left(\left(\frac{l-n-2}{l+m-1}\right)^{1-l}\left(\frac{m+n+1}{A(1-m-l)}\right)\right)^{\frac{1}{m+l-1}} x^{\frac{l-n-2}{m+l-1}}, \qquad (44)$$

con $n, m \neq 0, l \neq 0, 3, x, y > 0$, satisfaciendo $l - n - 2 \neq 0$ y $l + m - 1 \neq 0$, siempre y cuando la expresión quede bien definida por los parámetros m, n y l.

Observaciones: La solución invariante de la Proposición 4 que es calculada con el uso de la simetría Π_1 es exactamente la solución presentada por [17] y aparece en (7), con la salvedad de que en [17] no se presentan ninguna de las restricciones que se hacen necesarias.

IV. CONCLUSIONES

En la discusión anterior, se mostró en detalle los pasos aplicados para obtener las simetrías de Lie asociadas a dos ecuaciones diferenciales ordinarias. Mediante las Proposiciones 1 y 3, se han determinado los respectivos grupos de simetrías de Lie para las ecuaciones (4) y (5); además de especificar las condiciones necesarias para que los generadores de los respectivos grupos de simetrías, conduzcan a las soluciones invariantes presentadas en las Proposiciones 2 y 4. El objetivo propuesto se ha logrado, se espera sea útil como complemento e incentivo hacia la investigación para estudiantes de pregrado. Cabe resaltar además que, la simetría presentada para la Ecuación de Emdem-Fowler generalizada (5), no se encuentra en la literatura, a pesar que permite establecer la misma solución presentada en [17], que corresponde la expresión (7). El paso natural para abordar en trabajos futuros, es el cálculo de las respectivas leyes de conservación para ambas ecuaciones, usando las simetrías ya calculadas y el cálculo de los respectivos grupos de equivalencia de dichas ecuaciones. Lo anterior, permitiría hacer una clasificacion preliminar para cada uno de los respectivos grupos de simetrías y así poder comparar con las simetrías obtenidas.

REFERENCIAS

[1]. S. Chandrasekhar, An introduction to the study of stellar structure, Dover Publications, (1967).
[2]. S. Richardson, The Emission of Electricity from Hot Bodies, London, New York Longmans, Green and Co, (1921).
[3]. B. Mehta, R. Aris, A note on a form of the Emden-Fowler equation, Journal of Mathematical Analysis and Applications 36 (3) (1971) 611 – 621.
[4]. A. Rosa, Modelagem matemática e simulacao do núcleo morto en catalisadores porosos para reacoes de ordens fracionárias, Dissertacao de mestrado, Faculdade de engenharia química de Lorena (2005).
[5]. H. Davis, Introduction to nonlinear differential and integral equations, Dover, New York, (1962).
[6]. C. Chan, Y. Hon, A constructive solution for a generalised ThomasFermi theory of ionised atoms, Quart. J. Appl. Math 45 (1987) 591–599.
[7]. E. Kamke, Differential Gleichungen Losungs method en und losungen, Chelsa Publishing Company, (1948).
[8]. L. Berkovich, The generalized Emden-Fowler equation, Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics 1 (1997) 155 – 163.
[9]. G. Murphy, Ordinary differential equations and their solutions, D. Van Nostrand Company Inc., (1960).
[10]. N. Shawagfeh, Non perturbative approximate solution for Lane–Emden equation, Journal of Mathematical Physics 34 (1993) 4364–4369.
[11]. A.M.Wazwaz, Analytical solution for the time-dependent Emden–Fowler type of equations by Adomian decomposition method, Comput. Math. Appl. 166 (2005) 638–651.
[12]. G. Adomian, Solution of physical problems by decomposition, Comput. Math. Appl. 27 (1994) 145–154.
[13]. M. S. Chowdhury, I. Hashim, Solutions of Emden–Fowler equations by homotopy-perturbation method, Nonlinear Analysis: Real World Applications 10 (1) (2009) 104 – 115.
[14]. M. S. Chowdhury, I. Hashim, Solutions of time-dependent Emden–Fowler type equations by homotopy-perturbation method, Phys.Lett. A 166 (2007) 305–313.

[15]. X. Shang, P. Wu, X. Shao, An efficient method for solving Emden–Fowler equations, Journal of the Franklin Institute 346 (9) (2009) 889 – 897.
[16]. J. D. Logan, Invariant variational principles, Academic Press, (1977).
[17]. A. D. Polyanin, Exact solutions for ordinary differential equations, Chapman and Hall/CRC, 2002.
[18]. J. Knezevic-Miljanovic, Vertical asymptotes of solutions of the Emden–Fowler equation, Differential Equations 43 (2007) 1753–1755.
[19]. M. S. Chowdhury, I. Hashim, Lie symmetries, Lagrangians and Hamiltonian framework of a class of nonlinear nonautonomous equations, Chaos 75 (2007) 204–211.
[20]. A. Ebadian, P. Darania, Study of exact solutions of nonlinear heat equations, Comp. Appl. Math. 27 (2008) 107–121.
[21]. P. J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, (1986).
[22]. G. Bluman, S. Anco, Symmetry and integration methods for differential equations, Springer Science and Business Media, (2008).
[23]. N. H. Ibragimov, CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, CRC Press, Boca Raton, (1996).
[24]. G. W. Bluman, J. D. Cole, Asimilarity methods for differential equations, Springer-Verlag, (1974).
[25]. L. Ovsyannikov, Group analysis of differential equations, Academic Press 75 (1982) 204–211.
[26]. P. Hydon, D. Crighton, Symmetry methods for differential equations: A beginner's guide, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, (2000).

G. Loaiza, et. al. "Simetrías de Lie y soluciones invariantes para las ecuaciones de Emden-Fowler estándar y Emden-Fowler generalizada." *The International Journal of Engineering and Science (IJES)*, 10(02), (2021): pp. 56-64.